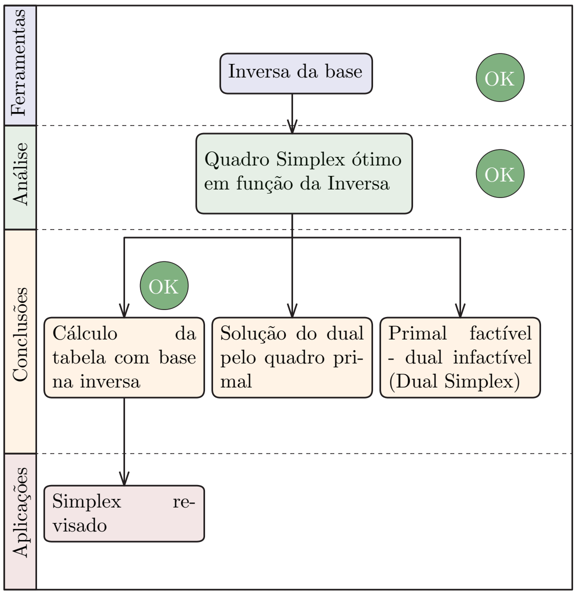
1 Onde estamos

Com as conclusões que chegamos em relação ao **cálculo da tabela Simplex com base na inversa**, estamos aptos a entender uma aplicação direta dos conceitos: o algoritmo Simplex Revisado (ou simplex por multiplicadores).



2 Retomando o quadro genérico

Como vimos, em função de uma **base (B)**, podemos recuperar todos os valores de uma tabela Simplex, usando as **fórmulas genéricas**:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Embora as fórmulas estejam escritas com as variáveis **básicas** e **não básicas** de forma separada, elas funcionam para quaisquer valores. Lembrando que um modelo de PL na forma padrão é:

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Seja

$$\begin{cases} A_i: & \text{Coluna } i \text{ da matriz A} \\ c_i: & \text{Elemento } i \text{ do vetor c} \end{cases}$$

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Para atualizarmos a coluna A_i (novo valor $\overline{A}_i$), e o valor de c_i (novo valor $\overline{c}_i$) usamos as seguintes fórmulas:

$$\overline{c}_i^T = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i$$

$$\overline{A}_i = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i$$

OBS: Essa atualização pode ser feita com mais de uma coluna ao mesmo tempo, bastando substituir A_i e c_i pelo conjunto de colunas e valores que serão atualizados.

EXEMPLO Considere o modelo de PL na forma padrão e a sua tabela final a seguir:

$$\begin{array}{llllll} \min -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1/2	5

Suponha que queiramos encontrar os valores atualizados (da tabela final) de $c^T = [c_3, c_4, c_5] = [3/2, 0, 1/2]$, sabendo que a base tem $[x_1, x_4, x_2]$.

Podemos usar a fórmula:

$$\overline{c}_i = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i$$

EXEMPLO Coletando os dados:

$$\begin{array}{llllll} \min -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

1. $c_i^T = [0, 0, 0]$
2. $\mathbf{c}_B^T = [-1, 0, -2]$
3. $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
4. $$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Temos que a inversa da base é:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\overline{c}_i^T = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_i^T} - \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_B^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_i}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO Considere o modelo de PL e a sua tabela final a seguir:

$$\begin{array}{lllllll} \min -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & = 6 \\ x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & = 4 \\ -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & = 4 \end{array}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	3/2	0	1/2	11
x_1	1	0	1/2	0	-1/2	1
x_4	0	0	0	1	1	8
x_2	0	1	1/2	0	1/2	5

Suponha que agora queremos encontrar as colunas da matriz referentes às variáveis x_3 e x_4, ou seja A_3 e A_4.

Podemos usar a fórmula:

$$\boxed{\overline{A}_i = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i}$$

EXEMPLO Coletando os dados:

$$\begin{array}{cccccc} \min -x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 & \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & 0 & 0 & =6 \\ x_1 & -x_2 & 0 & +x_4 & 0 & =4 \\ -x_1 & +x_2 & 0 & 0 & +x_5 & =4 \end{array}$$

1. $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3. $$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\overline{A}_i = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_i} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

3 Motivação: qual o problema do Simplex?

Considerando o seguinte quadro inicial Simplex:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Na primeira iteração **olhamos para a linha** c^T para encontrar o mínimo, para A_2 e b para fazer a razão. Em seguida realizamos o pivoteamento, e **todos os elementos da tabela** são alterados:

$$\begin{cases} c^T : n \\ A : mxn \\ b^T : m \\ z : 1 \end{cases}, Total = (n+1)(m+1)$$

A tabela atualizada fica da seguinte forma:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Novamente **olhamos para a linha** c^T para encontrar o mínimo, para A_1 e b para fazer a razão. Embora tenhamos atualizado **toda** a tabela na iteração passada, nenhum dos valores em vermelho foi usado nessa iteração!

Conclusão

Percebemos então que ao usarmos o Simplex por quadros, muitos valores são atualizados e não são utilizados nas iterações seguintes. Esse fato justifica uma utilização mais inteligente do Simplex, pelo algoritmo chamado **Simplex Revisado**.

OBS: O modelo resolvido nesta apresentação é o mesmo do resolvido em "Simplex Fase II". Compare os dois métodos e veja que os resultados são os mesmos.

4 Simplex Revisado

IDEIA GERAL

O Simplex revisado parte do pressuposto de que, se sabemos qual é a base (**B**), então é possível calcular a sua inversa B^{-1}, e consequentemente **fazer uso das fórmulas genéricas** para recuperar o quadro Simplex. Com isso, ao invés de atualizar o quadro todo a toda iteração, simplesmente **geramos as informações relevantes** a medida que precisamos delas.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Seja o quadro inicial como mostrado acima. Temos que inicialmente $x_B^T = [x_3, x_4, x_5]$, e a base é $B = [A_3 A_4 A_5]$. Na primeira iteração nada é alterado, pois já temos todos os dados, assim:

$$\begin{cases} x_2 \text{ entra na base} \\ x_5 \text{ sai da base} \end{cases}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Assim, temos que $x_B^T = [x_3, x_4, x_2]$, e a **nova base** é $B = [A_3 A_4 A_2]$, ou seja:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para sabermos se o algoritmo pode parar, devemos calcular os valores de c^T atualizados pela fórmula $\overline{c}_i^T = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Para isso, precisamos então de B^{-1}, c_B^T, c_i^T e A_i.

Temos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -150 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_i^T = \begin{bmatrix} -100 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\overline{c}_i^T = [\overline{c}_1, \overline{c}_5] = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$$

$$\overline{c}_i^T = \begin{bmatrix} -100 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-100, 150]$$

Assim, sabemos que o novo vetor c^T fica:

$$c^T = [-100, 0, 0, 0, 100]$$

Como existe $c_i < 0$ o algoritmo deve continuar, e portanto selecionamos a variável x_1 para **entrar na base** (min c_i^T).

O próximo passo é a seleção da **variável que sai da base**, pela razão b/A_i, de forma que precisamos encontrar os valores atualizados de A_1 e b. Novamente usamos as fórmulas genéricas:

$$\overline{b} = B^{-1} b$$

$$\overline{A}_i = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$$

Temos então que:

$$\overline{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

e

$$\overline{A}_i = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agora, com os valores atualizados podemos determinar a variável que **sai da base**, pelo $min\{b/A_i\}$. Temos que minimo $= 30/2 = 15$, na primeira linha. A primeira linha tinha a variável x_3 como básica, portanto:

$$\begin{cases} x_1 \text{ entra na base} \\ x_3 \text{ sai da base} \end{cases}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_1	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Assim, temos que $x_B^T = [x_1, x_4, x_2]$, e a base é $B = [A_1 A_4 A_2]$, ou seja:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para sabermos se o algoritmo pode parar, devemos calcular os valores de c^T atualizados pela fórmula $\bar{c}_i^T = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i$

Para isso, precisamos então de B^{-1}, c_B^T, c_i^T e A_i.

Temos que:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B^T = \begin{bmatrix} -100 & 0 & -150 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$\boxed{\bar{c}_i^T = [\bar{c}_3, \bar{c}_5] = \mathbf{c}_i^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_i}$$

$$\bar{c}_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -100 & 0 & -150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [50, 0]$$

Assim, sabemos que o novo vetor c^T fica:

$$c^T = [0, 0, 50, 0, 0]$$

Como não existe $c_i < 0$ o algoritmo **pode parar**, e temos a solução ótima com as variáveis básicas $x_B^T = [x_1, x_4, x_2]$. Agora só é necessário coletar os valores das variáveis (vetor $\bar{b}$) e o **custo** da fo.

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix}$$

e

$$-z = -\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = -\begin{bmatrix} -100 & 0 & -150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} = 6000$$

Usando o método Simplex Revisado, **não precisamos atualizar toda a tabela Simplex**, simplesmente os valores que são necessários naquela iteração, de forma geral (iniciando com uma base B e uma inversa B^{-1}):

PASSOS DO SIMPLEX REVISADO

1. Encontre os valores atualizados de A_i e b.
2. Determine a variável que entre e a que sai da base com os valores atualizados.
3. Atualize a base B e a inversa B^{-1}
4. Atualize c_T, se $c_T >= 0$ PARE. Senão volte para o passo 1.

Essa abordagem possui algumas limitações:

1. Uma limitação do método Simplex revisado é a **determinação da inversa da base** B^{-1} a cada iteração. Isso implica o cálculo da eliminação de Gauss em uma matriz mxm a toda iteração.

2. Esse problema pode ser parcialmente resolvido, aproveitando a inversa de iterações antigas.

3. Note que o Simplex sempre faz a troca de **uma coluna de B** a cada iteração (variável que sai e que entra na base). Dessa forma, podemos usar a inversa da iteração anterior e somente atualizar com a nova coluna que deve fazer parte da nova base.

5 Cálculo da nova inversa a partir da anterior

Considere a primeira matriz inversa B_1^{-1} do exemplo resolvido (a própria identidade):

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para fazer a atualização da inversa, precisamos de duas informações:

1. A nova coluna c que deve ser inserida.
2. Em qual posição ela será inserida (coluna p).

O primeiro passo então é determinar **qual é a coluna da identidade original** referente ao índice p (I_p). Em seguida, realizamos as operações na matriz B^{-1} atual, necessárias para transformar c em I_p. O resultado final é a nova matriz inversa.

Continuando com o exemplo, na primeira iteração determinamos que x_2 entra na base e x_5 sai, dessa forma temos que:

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} c = \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} p = 3, I_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podemos escrever uma matriz aumentada, com todas as informações:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Agora só precisamos executar as operações em linhas para **transformar a coluna de** x_2 **em** I_p. São elas:

1. $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$

A nova matriz inversa B_2^{-1} fica:

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Na nova iteração, temos que x_1 entra na base e x_3 sai. De forma que:

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_4 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} c = \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} p = 1, I_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada fica:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

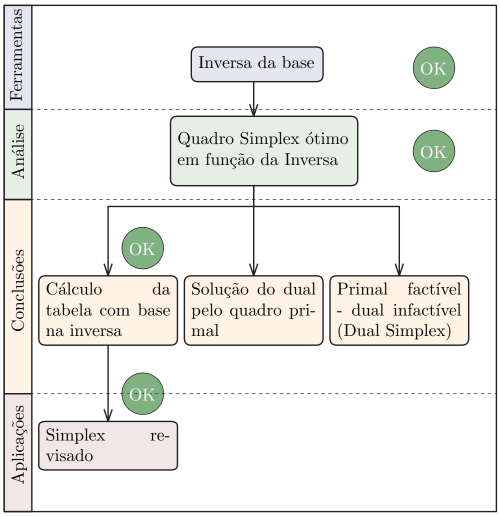
Para transformar x_1 em I_p:

1. $L_1 \leftarrow L_1/2$
2. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

Finalmente, a última inversa B_3^{-1} fica:

$$\mathbf{B}_3^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_4 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -3/2 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dessa forma, conseguimos calcular todas as matrizes inversas, usando as informações anteriormente calculadas.



6 Exercícios

1. Existe alguma desvantagem em usar o método Simplex por tabelas? Qual?
2. Qual é a ideia central do método Simplex revisado? Por quê ele pode ser considerado uma melhoria do método Simplex?
3. Existe alguma desvantagem em usar o método Simplex revisado? Como essa desvantagem pode ser sanada?